ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
VIII 1948 3

ФИЗИКА

В. А. Амбарцумян, действ. чл. АН Армянской ССР

О числе рассеяний при диффузии фотонов в мутной среде

(Представлено 21 II 1948)

Теория рассеяния света в мутной среде (т. е. в среде, где происходит как поглощение, так и рассеяние) разбирает стационарные задачи теории диффузии фотонов через среду. При этом в качестве основной задачи в теории рассеяния всегда ставился вопрос о вычислении интенсивности света в заданной точке и в заданном направлении. Вопрос же о статистике чисел рассеяний, испытанных квантами, входящими в состав того или иного пучка, обычно не ставился. Между тем оказывается возможным решить и этот вопрос, оставаясь в рамках стационарной задачи, т. е. без рассмотрения хода процесса во времени. Это решение и составляет цель настоящей заметки.

Рассматриваемая при этом проблема многократного рассеяния в мутной среде может носить весьма общий характер. Среда может занимать объем любой формы. Зависимость коэфициента рассеяния σ от координат в этом объеме может быть какой угодно. Точно также падающее извне излучение, заданное нам, может иметь любую зависимость от координат точек на границе среды и направления падения. Может быть задано также любое распределение источников фотонов. Даже индикатриса рассеяния может меняться от точки к точке. Единственное допущение, делаемое нами, заключается в том, что коэфициент поглощения $\varkappa$ пропорционален коэфициенту рассеяния и, что, следовательно, отношение

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma+\varkappa},$$

представляющее вероятность „выживания" фотона при элементарном акте взаимодействия его с частицами среды, есть величина постоянная.

Это отношение λ входит в уравнение переноса

$$\frac{1}{\sigma+\varkappa}\frac{dI}{ds} = -I + \frac{\lambda}{4\pi}\int x(\gamma, P)\, I d\omega + \frac{\varepsilon}{4\pi}, \qquad (1)$$

где I есть интенсивность излучения, $x(\gamma, P)$ есть индикатриса рассеяния, представляющая собою функцию как угла рассеяния γ, так и точки P, а s—плотность источников.

При заданных предельных условиях решение уравнения (1) является функцией точки, направления и величины λ.

Очевидно, что интенсивность для любой точки и направления при $\lambda = 1$ (чистое рассеяние) может быть представлена в виде:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} I_n ,$$

где I_n есть интенсивность, обусловленная фотонами, претерпевшими n рассеяний.

В общем же случае $\lambda \neq 1$ очевидно, будем иметь

$$I(\lambda) = \Sigma \lambda^n I_n , \qquad (2)$$

так как λ^n есть вероятность выживания фотона после n рассеяний.

Очевидно, что ряд (2) сходится в круге $|\lambda| \leq 1$.

Таким образом, достаточно взять n-ый член разложения I по степеням λ и разделить на I, чтобы узнать какую долю среди квантов, проходящих в данной точке и в данном направлении составляют кванты, претерпевшие n рассеяний. Иными словами, эта доля равна

$$P_n = \lambda^n \frac{I_n}{I} . \qquad (3)$$

Отсюда нетрудно найти и среднее число рассеяний, приходящихся на один квант данного пучка. Оно равно

$$\bar{n} = \Sigma n p_n = \lambda \frac{\partial \log I}{\partial \lambda} . \qquad (4)$$

Точно также можно найти среднее квадратичное отклонение по формуле

$$\sigma^2 = \overline{n(n-1)} + \bar{n} - \bar{n}^2 = \frac{\lambda^2}{I} \frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2} + \frac{\lambda \partial I}{I \partial \lambda} - \frac{\lambda^2}{I^2} \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda} \right)^2$$

$$= \left(\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \log I. \qquad (5)$$

Формулы (4) и (5) остаются в силе и в тех случаях, когда речь идет о числе рассеяний квантов, идущих не в одном направлении, а в совокупности каких-либо направлений. При этом в формулы вместо I войдут сумма или интеграл от интенсивностей по взятой совокупности направлений. Можно брать и взвешенные суммы.

В качестве примера возьмем один случай диффузного отражения света. На плоскую границу полубесконечной среды падает излучение по всем направлениям. Пусть интенсивность падающих лучей в каждом направлении пропорциональна секансу угла падения. Индикатриса рассеяния во всей среде сферическая.

Нас интересует среднее число рассеяний, испытанных световыми квантами, входящими в полный поток диффузно отраженных фотонов, независимо от угла выхода.

Если мы введем функцию отражения $r(\eta, \xi)$ от косинусов ξ и η углов падения и отражения [1], то поскольку интенсивность света, падающего на границу в направлении ξ, будет $\frac{S}{\xi}$, где S постоянная, очевидно, что интенсивность света, отраженного в направлении η по определению $r(\eta, \xi)$ равна

$$I(\eta)=2S \int r(\eta, \xi) \frac{d\xi}{\xi}. \tag{6}$$

Полный поток отраженных фотонов, выходящих по всем направлениям, будет

$$H=2 \int I(\eta)\eta d\eta=4\pi S \int\int r(\eta, \xi) \frac{\eta}{\xi} d\eta d\xi. \tag{7}$$

Но при сферической индикатрисе рассеяния, как известно [2]

$$r(\eta, \xi)= \frac{\lambda}{4} \xi \frac{\varphi(\eta)\varphi(\xi)}{\eta+\xi}, \tag{8}$$

где функция $\varphi(\eta)$ удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\varphi(\eta)= 1 + \frac{\lambda}{2} \eta\varphi(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi(\xi)}{\eta+\xi} d\xi. \tag{9}$$

Внося (8) в (7), находим

$$H=\lambda\pi S\int\int \frac{\eta\varphi(\eta)\varphi(\xi)}{\eta+\xi} d\eta d\xi. \tag{10}$$

Складывая (10) с таким же интегралом, в котором переменные интегрирования η и ξ заменены друг другом, получаем

$$2H=\lambda\pi S \left(\int \varphi(\eta)d\eta \right)^2=\lambda\pi SA^2, \tag{11}$$

где A интеграл в скобках.

Интегрируя обе стороны уравнения (9) в пределах от нуля до единицы и совершая такое же преобразование, находим

$$A = 1 + \frac{\lambda}{4} A^2. \tag{12}$$

Поэтому

$$H=2\pi S \frac{2-\lambda-2\sqrt{1-\lambda}}{\lambda}. \tag{13}$$

Применяя формулу (4), мы найдем, что среднее число рассеяний, испытываемых квантами выходящего потока, равно

$$\bar{n}=\lambda \frac{\partial \log H}{\partial\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}. \tag{14}$$

Так, например, при $\lambda = 0{,}75$ имеем в среднем два рассеяния на один отраженный квант.

Однако, при $\lambda \to 1$ среднее число рассеяний стремится к бесконечности. Иными словами, при $\lambda = 1$ сумма (4) расходится, хотя ряд (2) сходится.

Впрочем, бесконечное в среднем число рассеяний при $\lambda = 1$ получается только в процессе диффузного отражения при бесконечной оптической толщине чисто рассеивающего слоя. При конечной толщине $\bar{n}$ конечно.

Заметим, наконец, что в случае бесконечного слоя

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{(1-\lambda)^{3/2}}. \tag{15}$$

Примечательным является то, что формулы (8) и (9) были получены ([1,2]) путем исследования условий в бесконечно-тонком слое на границе среды. Результаты (14) и (15) основаны на этих формулах. Таким образом оказалось возможным получить данные о числе рассеяний при диффузии фотонов, не рассматривая вовсе процессов внутри среды.

В следующем номере настоящего журнала будет опубликована статья М. Тер-Микаеляна, где выведено значение $\bar{n}$ для различных случаев одномерной задачи рассеяния света. Автор ее участвовал и в обсуждении настоящей работы.

Бюраканская Астрофизическая Обсерватория
Академии Наук Армянской ССР
Ереван, 1948, февраль.

Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ֆոտոնների ցրումների թիվը պղտոր միջավայրում կատարվող դիֆուզիայի դեպքում

Պղտոր միջավայրում լույսի ցրման տեսությունը քննում է ֆոտոնների դիֆֆուզիայի տեսության տարացինաւ խնդիրները։ Այդ խնդիրների նկատմամբ, սակայն, մինչև այժմ դրված չի եղել այս կամ այն փնջի մեջ մտնող ֆոտոնների կողմից տարած ցրումների թվի խնդիրը։ Պարզվում է, որ այս վիճակագրական խնդիրը կարելի է լուծել ամենաընդհանուր դեպքի համար։

Եթե γ-ն հավասար է ցրման և թուլացման գործակիցների հարաբերությանը, ապա փնջի ինտենսիվությունը յուրաքանչյուր կետում և ուղղությամբ կախված կլինի γ-ից։ Դիֆերենցելով այդ կախումը, մենք, համաձայն (4)-ի, կարող ենք հաշվել փնջի մեջ մտնող ֆոտոնների կողմից տարած ցրումների միջին թիվը, իսկ համաձայն (5)-ի՝ այդ ցրումների թվի դիսպերսիան։

Պարզվում է, օրինակ, որ հարթ-զուգահեռ շերտերի դեպքում, երբ պղտոր միջավայրը գրավում է կիսատարածություն, իսկ այդ միջավայրի սահմանի վրա դրսից ընկնող ուղղություններով ճառագայթներ են ընկնում, որոնց ինտենսիվությունը համեմատական է անկման անկյան սեկանսին, դիֆֆուզ կերպով անդրադարձված ֆոտոնների կողմից ապրած ցրումների միջին թիվը հավասար է

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}.$$

Ընդհանրապես մենք կարող ենք ինտենսիվությունը Տեյլորի շարքի վերածել ըստ λ-ի աստիճանների։ Այն ժամանակ եթե I_n-ը λ^n-ի գործակիցն է, ապա հավանականությունը, որ տվյալ փնջի մեջ մտնող կվանտը ապրել է n ցրում, տրվում է (3)-ի միջոցով.

Հետաքրքիրն այն է, որ լույսի ցրման բազմաթիվ խնդիրներ մինչև վերջը լուծված են միայն սահմանային պայմանների ուսումնասիրության միջոցով։ Մասնավորապես՝ այդ մեթոդով կարելի է լուծել դիֆֆուզ անդրադարձման խնդիրը և ստանալ անդրադարձվող ճառագայթների ինտենսիվությունը։ Հետևաբար, (3)-ի հիման վրա հնարավոր է նաև որոշել անդրադարձվող կվանտի կողմից ապրած ցրումների այս կամ այն թվի հավանականությունը։

Այսպիսով ստացվում է, որ մենք կարող ենք եզրակացություններ անել դիֆֆուզիայի ժամանակ կատարվող ցրումների թվի մասին, առանց միջավայրի ներսում տեղի ունեցող երևույթների քննարկման։

Այս հանգամանքը չափազանց ուշագրավ է։

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Амбарцумян*, ЖЭТФ, 13, 324, 1943. 2. *В. А. Амбарцумян*, ДАН СССР, 38, 257, 1943.